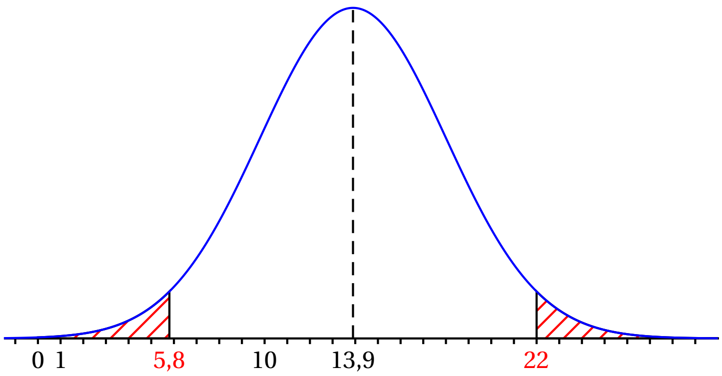
Corrigé du baccalauréat S Pondichéry 22 avril 2016

Exercice 1 — **Commun à tous les candidats** — **4 points**

Partie A



1. On sait que $p(T \geqslant 22) = 0,023$.

   a. Le premier domaine est limité par la courbe, l'axe des abscisses et la droite verticale d'équation $x = 22$.

   L'autre domaine est le symétrique du premier par rapport à la droite d'équation $x = 13,9$; $22 - 13,9 = 8,1$ et $13,9 - 8,1 = 5,8$.

   Le second domaine est limité par la courbe, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = 5,8$. Voir ci-dessus

   b. $P(5,8 \leqslant T \leqslant 22) = 1 - (P(T > 22) + P(T < 5,8)) = 1 - 2 \times 0,023 = 1 - 0,046 = 0,954$

   D'après le cours, $P(\mu - 2\sigma \leqslant T \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,954$, donc on a

   $P(13,9 - 2\sigma \leqslant T \leqslant 13,9 + 2\sigma) = 0,954$.

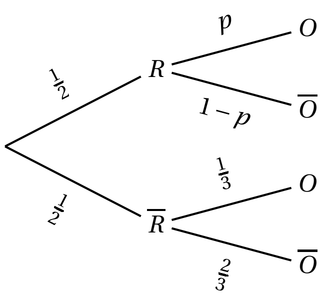
   On en déduit que σ vérifie $13,9 - 2\sigma = 5,8$ et $13,9 + 2\sigma = 22$, ce qui donne $\sigma \approx 4,05$, soit 4,1 au dixième.

2. On cherche la probabilité qu'un jeune soit connecté à internet plus de 18 heures par semaine, c'est-à-dire $P(T > 18)$.

   On trouve à la calculatrice, en prenant $m = 13,9$ et $\sigma = 4,1$: $P(T > 18) \approx 0,16$.

Partie B

1. *Calculs de probabilités*



   D'après la loi des probabilités totales :

   $p(O) = p(R \cap O) + p\left(\overline{R} \cap O\right) = p(R) \times p_R(O) + p(\overline{R}) \times p_{\overline{R}}(O) = \dfrac{1}{2} \times p + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}p + \dfrac{1}{6}$.

   Donc la probabilité q de l'évènement « le jeune a répondu Oui » est : $q = \dfrac{1}{2}p + \dfrac{1}{6}$.

2. *Intervalle de confiance*

   a. La fréquence de Oui est $f = \dfrac{625}{1\,500} = \dfrac{5}{12}$.
   L'intervalle de confiance, au niveau de confiance de 95 %, de la proportion q de jeunes qui répondent « Oui » à un tel sondage est donc
   $\left[f - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[\dfrac{5}{12} - \dfrac{1}{\sqrt{1\,500}}\ ;\ \dfrac{5}{12} + \dfrac{1}{\sqrt{1\,500}}\right] \approx [0,390\ ;\ 0,443]$.

   b. Si le protocole est correct on a donc :
   $0,390 \leqslant \dfrac{1}{2}p + \dfrac{1}{6} \leqslant 0,443 \iff 2,340 \leqslant 3p + 1 \leqslant 2,658 \iff 1,340 \leqslant 3p \leqslant 1,658$
   $\iff \dfrac{1,340}{3} \leqslant p \leqslant \dfrac{1,658}{3}$ soit $0,446 \leqslant p \leqslant 0,553$
   Le nombre de jeunes qui pratiquent au moins une fois par semaine le téléchargement illégal sur internet est entre 44,6 % et 55,3 %.

Exercice 2 — Commun à tous les candidats — 3 points

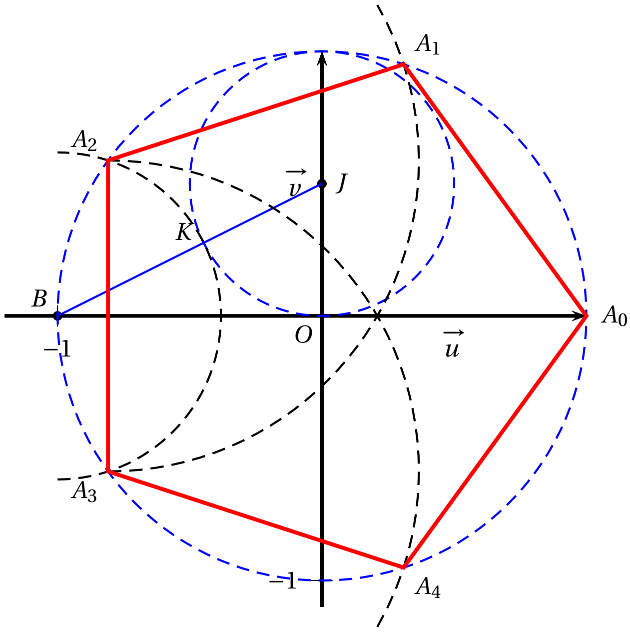
1. Le théorème de Pythagore appliqué au triangle OBJ rectangle en O donne :
   $BJ^2 = BO^2 + OJ^2 = 1^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4} \Rightarrow BJ = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$
   $BK = BJ - KI = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

2. **a.** L'affixe de A_2 a pour module 1 et pour argument $\dfrac{2\pi}{5} + \dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{4\pi}{5}$. Donc $z_{A_2} = \mathrm{e}^{\frac{4\pi}{5}}$

   b. $BA_2{}^2 = \left|z_{A_2} - z_B\right|^2 = \left|\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{5}} - (-1)\right|^2 = \left|\mathrm{e}^{\frac{4\pi}{5}} + 1\right|^2 = \left|\cos\dfrac{4\pi}{5} + 1 + \mathrm{i}\sin\dfrac{4\pi}{5}\right|^2$
   $= \left(\cos\dfrac{4\pi}{5} + 1\right)^2 + \sin^2\dfrac{4\pi}{5} = \cos^2\dfrac{4\pi}{5} + 2\cos\dfrac{4\pi}{5} + 1 + \sin^2\dfrac{4\pi}{5} = 2 + 2\cos\left(\dfrac{4\pi}{5}\right)$

   c. D'après le logiciel de calcul formel, $\cos\dfrac{4\pi}{4} = \dfrac{1}{4}\left(-\sqrt{5} - 1\right)$ donc :
   $BA_2^2 = 2 + 2 \times \dfrac{1}{4}\left(-\sqrt{5} - 1\right) = 2 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2} = \dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}$
   Donc $BA_2 = \sqrt{\dfrac{3 - \sqrt{5}}{2}} = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{5} - 1\right)$ d'après le logiciel de calcul formel.
   On en déduit que $BA_2 = BK$.

3. Procédé de construction (voir figure page 3) :
   - on construit B, J, $[BJ]$ et le cercle $\mathscr{C}$ centré en J passant par O donc de rayon $\dfrac{1}{2}$;
   - on obtient le point K à l'intersection du cercle $\mathscr{C}$ et du segment $[BJ]$;
   - le cercle de centre B de rayon BK coupe le cercle unitaire aux points A_2 et A_3 ;
   - le cercle de centre A_2 passant par A_3 recoupe le cercle unitaire en A_1 ;
   - le cercle de centre A_3 passant par A_2 recoupe le cercle unitaire en A_4 ;
   - le point A_0 est le point d'affixe 1.

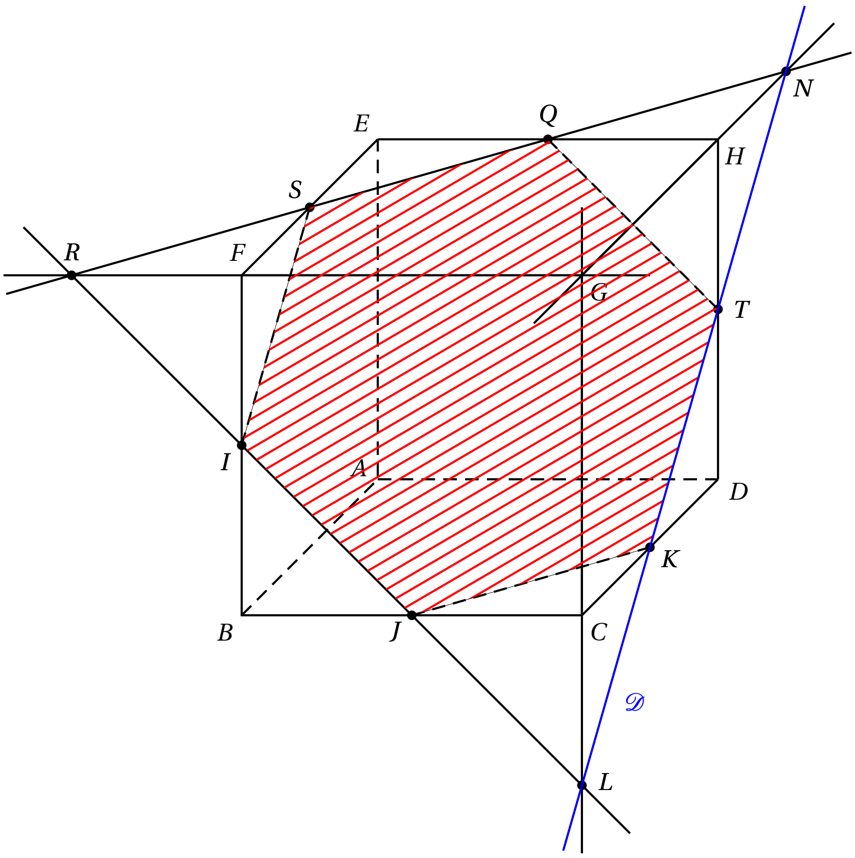


Exercice 3 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

On admet que les droites (IJ) et (CG) sont sécantes en un point L.

On construit :
- le point L ;
- l'intersection $\mathscr{D}$ des plans (IJK) et (CDH) ;
- la section du cube par le plan (IJK).



Partie B

L'espace est rapporté au repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Dans le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,,\,\overrightarrow{AD}\,,\,\overrightarrow{AE}\right)$, les coordonnées des sommets du cube sont :
$A\,(0\,;\,0\,;\,0)$, $B\,(1\,;\,0\,;\,0)$, $D\,(0\,;\,1\,;\,0)$, $E\,(0\,;\,0\,;\,1)$, $C\,(1\,;\,1\,;\,0)$, $F\,(1\,;\,0\,;\,1)$, $H\,(0\,;\,1\,;\,1)$, $G\,(1\,;\,1\,;\,1)$.
Le point I est le milieu de $[BF]$ donc I a pour coordonnées $\left(1\,;\,0\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.
Le point J est le milieu de $[BC]$ donc J a pour coordonnées $\left(1\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$.
Le point K est le milieu de $[CD]$ donc K a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,1\,;\,0\right)$.

2. **a.** Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ a les mêmes coordonnées que le point G c'est-à-dire $(1\,;\,1\,;\,1)$.
   - $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(1-1\,;\,\dfrac{1}{2}-0\,;\,0-\dfrac{1}{2}\right)=\left(0\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.
   $\overrightarrow{AG}\,.\,\overrightarrow{IJ}=1\times 0+1\times\dfrac{1}{2}+1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0$ donc $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{IJ}$
   - $\overrightarrow{JK}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}-1\,;\,1-\dfrac{1}{2}\,;\,0-0\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$.
   $\overrightarrow{AG}\,.\,\overrightarrow{JK}=1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+1\times\dfrac{1}{2}+1\times 0=0$ donc $\overrightarrow{AG}\perp\overrightarrow{JK}$

   Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ ne sont pas colinéaires ; le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) donc il est normal au plan (IJK).

   b. Le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK) ; le plan (IJK) est l'ensemble des points $P\left(x\,;\,y\,;\,z\right)$ de l'espace tels que $\overrightarrow{IP}$ est orthogonal à $\overrightarrow{AG}$:
   Le vecteur $\overrightarrow{IP}$ a pour coordonnées $\left(x-1\,;\,y-0\,;\,z-\dfrac{1}{2}\right)=\left(x-1\,;\,y\,;\,z-\dfrac{1}{2}\right)$.
   $\overrightarrow{AG}\,.\,\overrightarrow{IP}=0\iff 1\times(x-1)+1\times y+1\times\left(z-\dfrac{1}{2}\right)=0\iff x+y+z-\dfrac{3}{2}=0$
   Le plan (IJK) a pour équation $x+y+z-\dfrac{3}{2}=0$.

3. On désigne par M un point du segment $[AG]$ et t le réel de l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $\overrightarrow{AM}=t\overrightarrow{AG}$; donc le point M a pour coordonnées $(t\,;\,t\,;\,t)$.

   a. $IM^2=(t-1)^2+(t-0)^2+\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2=t^2-2t+1+t^2+t^2-t+\dfrac{1}{4}=3t^2-3t+\dfrac{5}{4}$

   b. Le trinôme ax^2+bx+c avec $a>0$ est minimal pour $x=-\dfrac{b}{2a}$, donc $3t^2-3t+\dfrac{5}{4}$ est minimal pour $t=-\dfrac{-3}{2\times 3}$ donc pour $t=\dfrac{1}{2}$.
   MI^2 donc MI est minimal pour $t=\dfrac{1}{2}$; cela correspond au point N de coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.

4. **a.** Le plan (IJK) a pour équation $x+y+z-\dfrac{3}{2}=0$ et le point N a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$.
   $x_N+y_N+z_N-\dfrac{3}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}=0$ donc $N\in(IJK)$

   b. Les points I et N apprtiennent au plan (IJK) et le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (IJK) ; on en déduit que les droites (IJ) et (AG) sont orthogonales.
   Mais le point N est le milieu de $[AG]$ donc il appartient à (AG).
   On peut donc en déduire que les droites (IN) et (AG) sont perpendiculaires en N.
   Le vecteur $\overrightarrow{IN}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}-1\,;\,\dfrac{1}{2}-0\,;\,\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=\left(-\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{1}{2}\,;\,0\right)$

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AE}$ donc le vecteur $\overrightarrow{BF}$ a pour coordonnées $(0\,;0\,;1)$.
$\overrightarrow{BF}\,.\,\overrightarrow{IN} = 0\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)+0\times\dfrac{1}{2}+1\times 0 = 0$ donc $\overrightarrow{BF}\perp\overrightarrow{IN}$ donc la droite (IN) est orthogonale à la droite (BF).
Mais le point I appartient aux deux droites (IN) et (BF) donc on peut dire que les droites (IL) et (BF) sont perpendiculaires en I.

Exercice 3 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité 5 points

Partie A

On considère les matrices M de la forme $M=\begin{pmatrix} a & b\\ 5 & 3\end{pmatrix}$ où a et b sont des nombres entiers.
Le nombre $3a-5b$ est appelé le déterminant de M. On le note $\det(M)$; ainsi $\det(M)=3a-5b$.

1. Dans cette question on suppose que $\det(M)\neq 0$ et on pose $N=\dfrac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} 3 & -b\\ -5 & a\end{pmatrix}$.
$MN=\begin{pmatrix} a & b\\ 5 & 3\end{pmatrix}\times\dfrac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} 3 & -b\\ -5 & a\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3a-5b}\begin{pmatrix} 3a-5b & -ab+ab\\ 15-15 & -5b+3a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
$NM=\dfrac{1}{\det(M)}\begin{pmatrix} 3 & -b\\ -5 & a\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} a & b\\ 5 & 3\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3a-5b}\begin{pmatrix} 3a-5b & 3b-3b\\ -5a+5a & -5b+3a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$
Donc N est la matrice inverse de la matrice M.
2. On considère l'équation (E) : $\det(M)=3$.
   a. $\det(M)=3 \iff 3a-5b=3$
   $3\times 6-5\times 3=18-15=3$ donc le couple $(6\,;3)$ est une solution de (E).
   b. • On suppose que le couple $(a\,;b)$ est solution de (E).
   $$\begin{array}{lrcrcl} & 3a & - & 5b & = & 3\\ (6\,;3)\text{ est solution} & 3\times 6 & - & 5\times 3 & = & 3\\ \hline \text{par soustraction} & 3(a-6) & - & 5(b-3) & = & 0 \end{array}\iff 3(a-6)=5(b-3)$$
   • Réciproquement, si $(a\,;b)$ vérifie $3(a-6)=5(b-3)$ alors :
   $3a-18=5b-15 \iff 3a-5b=3$ donc $(a\,;b)$ est solution de (E).

   Donc $(a\,;b)$ est solution de (E) si et seulement si $3(a-6)=5(b-3)$.
   On cherche les solutions de l'équation (E).
   - Si $3(a-6)=5(b-3)$, alors 3 divise $5(b-3)$; or 3 et 5 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de GAUSS, 3 divise $b-3$. Cela veut dire que $b-3$ s'écrit $3k$ avec k entier relatif.
   $3(a-6)=5(b-3)$ et $b-3=3k$ donc $3(a-6)=5\times 3k$ ce qui équivaut à $a-6=5k$
   $a-6=5k \iff a=6+5k$ et $b-3=3k \iff b=3+3k$ où $k\in\mathbb{Z}$
   Les solutions de (E) sont donc dans l'ensemble $\left\{(6+5k\,;3+3k)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$
   - Réciproquement, si $a=6+5k$ et $b=3+3k$ avec $k\in\mathbb{Z}$, $3a-5b=3(6+5k)-5(3+3k)=18+15k-15-15k=3$ donc $(a\,;b)$ est solution de (E).

   L'ensemble solution de (E) est $\left\{(6+5k\,;3+3k)\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$

Partie B

1. On pose $Q=\begin{pmatrix} 6 & 3\\ 5 & 3\end{pmatrix}$.
$\det(Q)=6\times 3-5\times 3=18-15=3\neq 0$ donc la matrice Q admet pour inverse la matrice
$Q^{-1}=\dfrac{1}{\det(Q)}\begin{pmatrix} 3 & -3\\ -5 & 6\end{pmatrix}=\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3\\ -5 & 6\end{pmatrix}$.

2. *Codage avec la matrice* Q

On code le mot DO en utilisant le procédé décrit dans le texte :.

$$\text{DO} \to X = \begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix} \to Y = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\times 3+3\times 14 \\ 5\times 3+3\times 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 57 \end{pmatrix} \to R = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \to \text{IF}$$

3. *Procédure de décodage*

Lors du codage, la matrice X a été transformée en la matrice Y telle que $Y = QX$.

a. $Y = QX \Longrightarrow Q^{-1}Y = Q^{-1}QX \iff Q^{-1}Y = X \iff 3Q^{-1}Y = 3X \iff 3X = 3Q^{-1}Y$

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$, $Q^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$ donc $3Q^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$

$3X = 3Q^{-1}Y \iff 3\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 3x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3y_1 - 3y_2 \\ -5y_1 + 6y_2 \end{pmatrix} \iff \left\{\begin{array}{rcl} 3x_1 & = & 3y_1 - 3y_2 \\ x_2 & = & -5y_1 + 6y_2 \end{array}\right.$

Or $y_1 \equiv r_1 \quad [26]$ et $y_2 \equiv r_2 \quad [26]$ donc on en déduit que $\left\{\begin{array}{rcll} 3x_1 & \equiv & 3r_1 - 3r_2 & [26] \\ 3x_2 & \equiv & -5r_1 + 6r_2 & [26] \end{array}\right.$

b. $9\times 3 = 27$ et $27 \equiv 1 \quad [26]$ donc $9 \times 3 \equiv 1 \quad [26]$

$\left\{\begin{array}{rcll} 3x_1 & \equiv & 3r_1 - 3r_2 & [26] \\ 3x_2 & \equiv & -5r_1 + 6r_2 & [26] \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} 9\times 3x_1 & \equiv & 9\times 3r_1 - 9\times 3r_2 & [26] \\ 9\times 3x_2 & \equiv & 9\times(-5)r_1 + 9\times 6r_2 & [26] \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{rcll} x_1 & \equiv & r_1 - r_2 & [26] \\ x_2 & \equiv & -45r_1 + 54r_2 & [26] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x_1 & \equiv & r_1 - r_2 & [26] \\ x_2 & \equiv & 7r_1 + 2r_2 & [26] \end{array}\right.$

car $-45 = -2\times 26 + 7 \equiv 7 \quad [26]$ et $54 = 2\times 26 + 2 \equiv 2 \quad [26]$

c. Le mot SG correspond à $R = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \end{pmatrix}$ donc $\left\{\begin{array}{rcl} r_1 & = & 18 \\ r_2 & = & 6 \end{array}\right.$

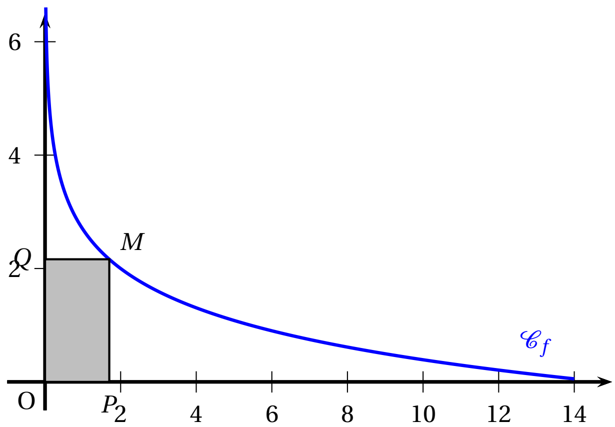
$\left\{\begin{array}{rcll} x_1 & \equiv & r_1 - r_2 & [26] \\ x_2 & \equiv & 7r_1 + 2r_2 & [26] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x_1 & \equiv & 12 & [26] \\ x_2 & \equiv & 138 & [26] \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcll} x_1 & \equiv & 12 & [26] \\ x_2 & \equiv & 8 & [26] \end{array}\right.$

qui correspond au mot MI.

Exercice 4 — Commun à tous les candidats — 3 points

Soit f la fonction définie sur $]0\,;\,14]$ par $f(x) = 2 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

La courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée dans le repère orthogonal d'origine O ci-dessous :



À tout point M appartenant à $\mathscr{C}_f$ on associe le point P projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et le point Q projeté orthogonal de M sur l'axe des ordonnées.

Le point M a pour abscisse x et pour ordonnée $f(x)$ donc l'aire du rectangle $OPMQ$ est $\mathscr{A}(x) = x \times f(x) = 2x - x\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Ètudions les variations de la fonction $\mathscr{A}$; on remarque que $\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) = \ln x - \ln 2$ donc $\left(\ln\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)' = \dfrac{1}{x}$

$\mathscr{A}'(x) = 2 - \left(\ln\left(\dfrac{x}{2}\right) + x\dfrac{1}{x}\right) = 1 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$1 - \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) > 0 \iff 1 > \ln\left(\dfrac{x}{2}\right) \iff \mathrm{e} > \dfrac{x}{2} \iff x < 2\mathrm{e}$

$\mathscr{A}(2\mathrm{e}) = 2 \times 2\mathrm{e} - 2\mathrm{e} \times \ln\dfrac{2\mathrm{e}}{2} = 2\mathrm{e}$ d'où le tableau de variation de la fonction $\mathscr{A}$:

x	0		$2\mathrm{e}$		14
$\mathscr{A}'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
$\mathscr{A}(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	$2\mathrm{e}$	$\searrow$	

$f(2\mathrm{e}) = 2 - \ln\dfrac{2\mathrm{e}}{2} = 2 - 1 = 1$. donc l'aire du rectangle $OPMQ$ est maximale pour le point M de coordonnées $(2\mathrm{e}\,;\,1)$.

Exercice 5 Commun à tous les candidats 5 points

Partie A : Modélisation discrète

Pour n entier naturel, on note T_n la température en degré Celsius de la boîte au bout de n minutes. On a donc $T_0 = 25$.
Pour n non nul, la valeur T_n est calculée puis affichée par l'algorithme suivant :

Initialisation :	T prend la valeur 25
Traitement :	Demander la valeur de n Pour i allant de 1 à n faire T prend la valeur $0,85 \times T + 15$ Fin Pour
Sortie :	Afficher T

1. On cherche T_3 :
   $T_1 = 0,85 \times T_0 + 15 = 36,25$; $T_2 = 0,85 \times T_1 + 15 = 45,8125$; $T_3 = 0,85 \times T_2 + 15 = 53,940625$
   La température de la boîte de conserve au bout de 3 minutes est approximativement de 54 ° C.
2. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.
   - Pour $n = 0$: $100 - 75 \times 0,85^0 = 100 - 75 \times 1 = 25 = T_0$ donc la propriété est vraie au rang 0.
   - On suppose la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$, c'est-à-dire $T_p = 100 - 75 \times 0,85^p$.
     D'après l'algorithme, on peut dire que, pour tout $n \geqslant 0$, $T_{n+1} = 0,85 \times T_n + 15$.
     Donc $T_{p+1} = 0,85\left(100 - 75 \times 0,85^p\right) + 15 = 85 - 75 \times 0,85^{p+1} + 15 = 100 - 75 \times 0,85^{p+1}$
     La propriété est donc vraie au rang $p + 1$.
   - La propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $p \geqslant 0$; elle est donc vraie pour tout $n \geqslant 0$.

   Pour tout entier naturel n, $T_n = 100 - 75 \times 0,85^n$.
3. La stérilisation débute dès que la température est supérieure à 85 ° C, donc on cherche n tel que $T_n > 85$:

$$\begin{array}{rcll} T_n > 85 & \iff & 100 - 75 \times 0,85^n > 85 & \\ & \iff & 15 > 75 \times 0,85^n & \\ & \iff & 0,2 > 0,85^n & \\ & \iff & \ln 0,2 > \ln\left(0,85^n\right) & \text{croissance de la fonction ln} \\ & \iff & \ln 0,2 > n \times \ln 0,85 & \text{propriété de la fonction ln} \\ & \iff & \dfrac{\ln 0,2}{\ln 0,85} < n & \text{car } \ln 0,85 < 0 \end{array}$$

Or $\dfrac{\ln 0,2}{\ln 0,85} \approx 9,9$ donc la stérilisation débute au bout de 10 minutes.

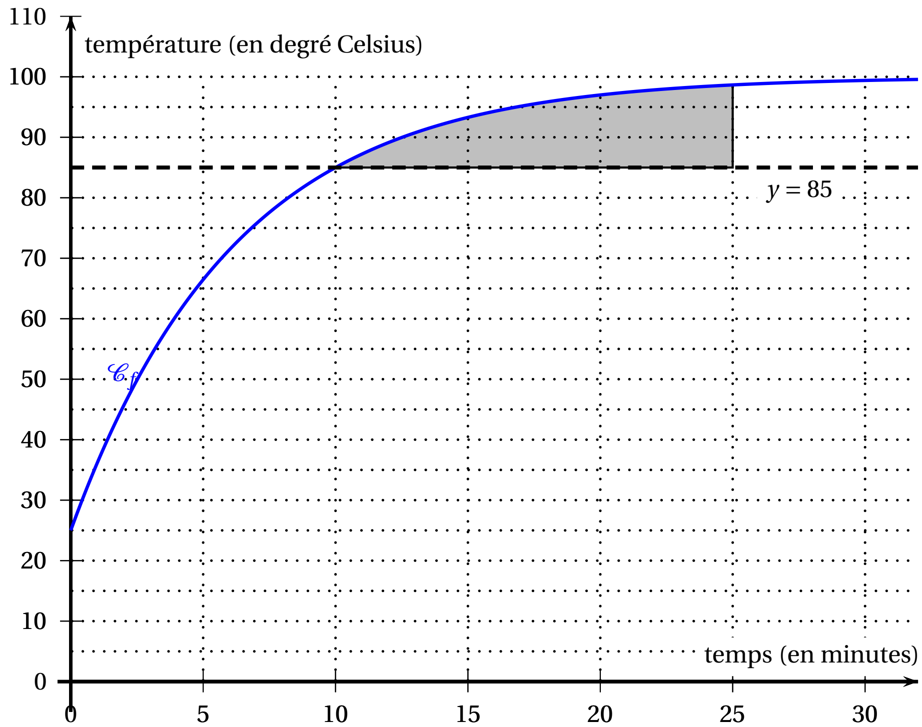
Partie B : Modélisation continue

Dans cette partie, t désigne un réel positif.
On suppose désormais qu'à l'instant t (exprimé en minutes), la température de la boîte est donnée par $f(t)$ (exprimée en degré Celsius) avec : $f(t) = 100 - 75\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}$.

1. **a.** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
$f'(t) = -75 \times \left(-\dfrac{\ln 5}{10}\right)\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} = 7,5 \times \ln 5\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t} > 0$ car $\mathrm{e}^x > 0$ pour tout réel x.
Donc la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

   b. $f(10) = 100 - 75\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}\times 10} = 100 - 75\,\mathrm{e}^{-\ln 5} = 100 - \dfrac{75}{\mathrm{e}^{\ln 5}} = 100 - \dfrac{75}{5} = 85$
Or la fonction f est strictement croissante donc si $x \geqslant 10$, alors $f(x) \geqslant f(10)$ ce qui veut dire qque $f(x) \geqslant 85$.

2. Soit θ un réel supérieur ou égal à 10.
On note $\mathscr{A}(\theta)$ le domaine délimité par les droites d'équation $t = 10$, $t = \theta$, $y = 85$ et la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f.
On considère que la stérilisation est finie au bout d'un temps θ, si l'aire, exprimée en unité d'aire du domaine $\mathscr{A}(\theta)$ est supérieure à 80.



   a. $A(25)$ est représentée en gris sur le graphique ci-dessus. Chaque rectangle correspond à 5×5 unités d'aire. En comptant les rectangles inclus dans la partie grisée, on en compte 3 entiers plus un demi, ce qui fait $3,5 \times 25 = 87,5$ unités d'aire. Donc $\mathscr{A}(25) > 80$.

b. $A(\theta) = \displaystyle\int_{10}^{\theta} \left(f(t) - 85\right) \mathrm{d}t = \int_{10}^{\theta} \left[\left(100 - 75 \times \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right) - 85\right] \mathrm{d}t = \int_{10}^{\theta} \left(15 - 75 \times \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right) \mathrm{d}t$

$= \displaystyle\int_{10}^{\theta} 15\,\mathrm{d}t - \int_{10}^{\theta} 75 \times \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t = 15\left[t\right]_{10}^{\theta} - 75\int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t = 15(\theta - 10) - 75\int_{10}^{\theta} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t$

c. La stérilisation est finie au bout de 20 minutes si $\mathscr{A}(20) > 80$.

$\mathscr{A}(20) = 15(20-10) - 75\displaystyle\int_{10}^{20} \mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\,\mathrm{d}t = 150 - 75\left[-\frac{10}{\ln 5}\mathrm{e}^{-\frac{\ln 5}{10}t}\right]_{10}^{20} = 150 + \frac{750}{\ln 5}\left[\mathrm{e}^{-2\ln 5} - \mathrm{e}^{-\ln 5}\right]$

$= 150 + \dfrac{750}{\ln 5}\left[\left(\mathrm{e}^{-\ln 5}\right)^2 - \mathrm{e}^{-\ln 5}\right] = 150 + \dfrac{750}{\ln 5}\left[\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 - \dfrac{1}{5}\right] = 150 + \dfrac{750}{\ln 5}\left[\dfrac{1}{25} - \dfrac{1}{5}\right]$

$= 150 + \dfrac{750}{\ln 5} \times \dfrac{-4}{25} = 150 - \dfrac{120}{\ln 5} \approx 75,44 < 80$

Donc la stérilisation n'est pas finie au bout de 20 minutes.